Institut für Visualisierung und Datenanalyse
Lehrstuhl für Computergrafik
Prof. Dr.-Ing. Carsten Dachsbacher

Karlsruher Institut für Technologie

Nachklausur Computergrafik
SS 2021

9.9.2021

Name	
Matrikelnummer	

Beachten Sie:

- Die Klausur umfasst 25 Seiten (12 Blätter) mit 11 Aufgaben.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Sie haben **90 Minuten** Bearbeitungszeit.
- Schreiben Sie Ihre Matrikelnummer oben auf jedes bearbeitete Aufgabenblatt.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Bei Bedarf können Sie weiteres Papier anfordern.
- Streichen Sie nicht zu bewertende Lösungen durch.
- Wir akzeptieren auch englische Antworten.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	**Gesamt**
Erreichte Punkte												
Erreichbare Punkte	13	16	17	18	10	22	13	12	28	13	12	**174**

Note

Aufgabe 1: Farbe und Perzeption (13 Punkte)

a) Ein LCD Bildschirm zeigt weiße Pixel mit einer Helligkeit von $250\,\frac{\mathrm{Cd}}{\mathrm{m}^2}$ und schwarze Pixel mit einer Helligkeit von $0,25\,\frac{\mathrm{Cd}}{\mathrm{m}^2}$ an. Bestimmen Sie den Dynamikumfang des Bildschirms für einen perfekt abgedunkelten Raum! **(2 Punkte)**

b) Wir betrachten eine relative Änderung der Helligkeit von 2% als Just Noticeable Difference (JND). Wie viele JND-Schritte benötigt man beim oben gegebenen Dynamikumfang um von der minimalen zur maximalen Helligkeit zu gelangen?
Tipp: Es gilt $\log_{10} 1.02 \approx \frac{1}{120}$. **(3 Punkte)**

c) Wie viele Bits werden benötigt um eine der Helligkeitsstufen aus der vorigen Aufgabe eindeutig zu speichern? **(1 Punkt)**

d) Wie heißen die Farben auf der Randkurve eines Chromatizitätsdiagramms (ohne die Purpurlinie)? Was für Spektren entsprechen diesen Farben? **(2 Punkte)**

e) Wir betrachten zwei Spektren, die jeweils nur Licht bei zwei Wellenlängen enthalten. Das erste hat Lichtintensität a bei λ_1 und b bei λ_2. Das zweite hat Lichtintensität c bei λ_1' und x bei λ_2'. Dabei ist

$$\begin{array}{llll} \lambda_1 := 450\,\text{nm}, & \lambda_2 := 605\,\text{nm}, & a = 1, & b = 1, \\ \lambda_1' := 485\,\text{nm}, & \lambda_2' := 665\,\text{nm}, & c = 3, & x\,\text{unbekannt}. \end{array}$$

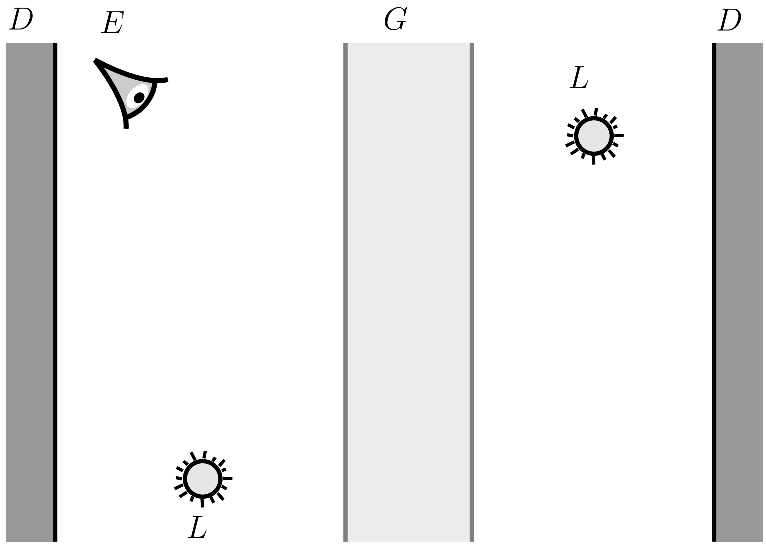
Bestimmen Sie die unbekannte Lichtintensität x, so dass die beiden Spektren metamer sind! Arbeiten Sie dabei mit den folgenden skalierten und gerundeten Werten der CIE Color Matching Funktionen bei den Wellenlängen λ_1, λ_2, λ_1' und λ_2':

$$\begin{array}{ll} \mathbf{s}_1 := (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})(\lambda_1) = (3{,}0, 18), & \mathbf{s}_2 := (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})(\lambda_2) = (10{,}6, 0), \\ \mathbf{s}_1' := (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})(\lambda_1') = (1{,}2, 6), & \mathbf{s}_2' := (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})(\lambda_2') = (1{,}0, 0). \end{array}$$

(5 Punkte)

Aufgabe 2: Whitted-style Raytracing (16 Punkte)

Die Abbildung zeigt eine Szene mit einer perfekt spekularen Glasscheibe G ($k_a = k_d = k_s = 0$, $k_t > 0$, $k_r > 0$) und diffusen Oberflächen D ($k_d > 0$, $k_a = k_s = k_t = k_r = 0$). Die vier Oberflächen sind exakt parallel. Die Szene wird durch zwei Punktlichter L beleuchtet und von einer Lochkamera E beobachtet. Die Brechzahl von G ist $\eta = 1,5$ und das umgebende Volumen hat Brechzahl 1.

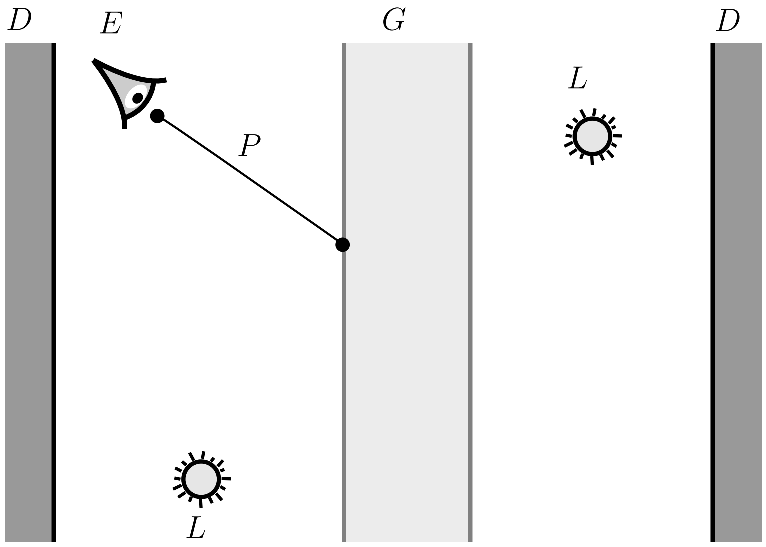


a) Zeichnen Sie jeden möglichen Strahlengang bis zu einer der Lichtquellen in das gegebene Diagramm ein! Ausgangspunkt ist dabei der eingezeichnete Primärstrahl P. Nutzen Sie Whitted-Style Raytracing mit einer Rekursionstiefe bis $N = 4$ um Sekundärstrahlen zu erzeugen. Markieren Sie Reflexionsstrahlen mit R, Transmissionsstrahlen mit T und Schattenstrahlen mit S! Strahlengänge, die letztlich nicht zur Lichtquelle führen, brauchen Sie nicht einzuzeichnen. Falls Sie beim Zeichnen Fehler machen, können Sie auch das obige Diagramm nutzen. Markieren Sie bitte eindeutig was bewertet werden soll!

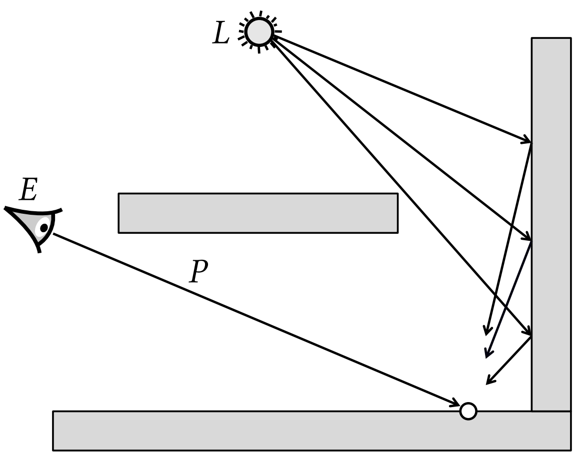
(7 Punkte)

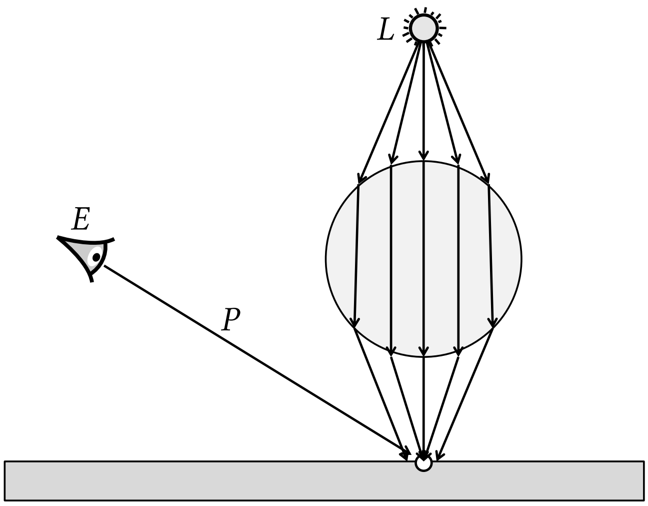
b) Kann für einen Strahlengang vom Primärstrahl P Totalreflexion auftreten? Begründen Sie Ihre Antwort! **(5 Punkte)**

c) In den folgenden Abbildungen ist die Oberfläche, die entlang dem eingezeichneten Primärstrahl sichtbar ist, entweder indirekt durch eine diffuse Wand oder durch Kaustiken,



die durch eine Glaskugel entstehen, beleuchtet. Kann Whitted-Style Raytracing diese Beleuchtung jeweils korrekt berechnen? Begründen Sie Ihre Antwort! **(4 Punkte)**



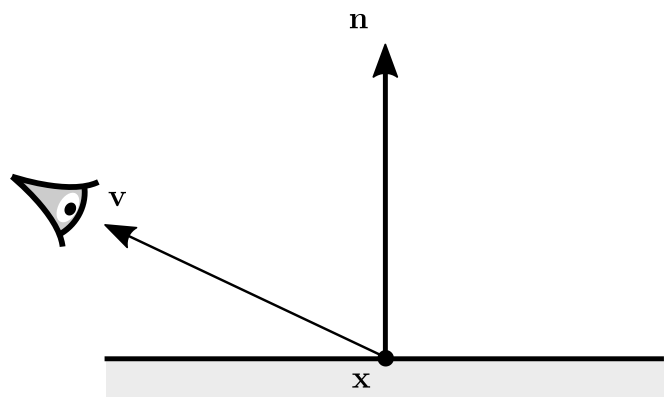


Aufgabe 3: Phong-Beleuchtungsmodell (17 Punkte)

a) Geben Sie die Formel für die spekulare Komponente des Phong-Beleuchtungsmodells an! Nutzen Sie dabei nach Bedarf die folgenden Bezeichner: **(2 Punkte)**

- $\mathbf{x}$: Position des Oberflächenpunkts
- $\mathbf{N}$: Normalenvektor der Oberfläche
- $\mathbf{v}$: Normierter Vektor zur Kamera
- $\mathbf{l}$: Normierter Vektor zur Lichtquelle
- $\mathbf{r}_\mathbf{l}$: Vektor $\mathbf{l}$ reflektiert bzgl. $\mathbf{N}$
- I_L: Intensität des eingehenden Lichts
- k_s: Oberflächenfarbe für die spekulare Komponente
- n: Exponent für die spekulare Komponente

b) Wir betrachten die Szene in der folgenden Abbildung. Die Oberfläche nutzt das Phong-Beleuchtungsmodell mit $k_a = k_d = 0$ und $k_s > 0$. Zeichnen Sie den Bereich ein in dem sich eine Punktlichtquelle befinden könnte damit die Stärke der spekularen Reflektion in Richtung $\mathbf{v}$ nicht Null ist! Zeichnen Sie dazu zusätzliche Linien ein und verdeutlichen Sie deren Verhältnis zu $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{n}$! **(4 Punkte)**



Matrikelnummer: ________________

c) Zum Rendern eines schattierten Dreiecksnetzes kann man Gouraud Shading oder Phong Shading verwenden. Erklären Sie wie sich das Vorgehen bei diesen beiden Techniken unterscheidet: **(4 Punkte)**

1) Phong Shading:

2) Gouraud Shading:

d) Ein Dreieck hat die Eckpunkte $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3$, gegeben im Uhrzeigersinn. Die zugehörigen Vertexnormalen sind $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ und $\mathbf{n}_3$. Ein Punkt $\mathbf{x}$ auf diesem Dreieck hat baryzentrische Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$. Wir nutzen 1) Flat Shading oder 2) Phong Shading für die Beleuchtung von $\mathbf{x}$. Geben Sie jeweils die Formel an nach der sich der Normalenvektor für die Beleuchtungsberechnung ergibt! **(4 Punkte)**

1) Flat Shading:

2) Phong Shading:

e) Wir rendern ein Tetraeder mit Phong Shading, d.h. unter Verwendung der gespeicherten Vertexnormalen. Wir wollen aber, dass das gerenderte Bild exakt so aussieht wie ein Bild, das mit Flat Shading erzeugt wird. Wie viele unterschiedliche Paare aus Vertexposition und Vertexnormale muss das Dreiecksnetz dafür verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort! **(3 Punkte)**

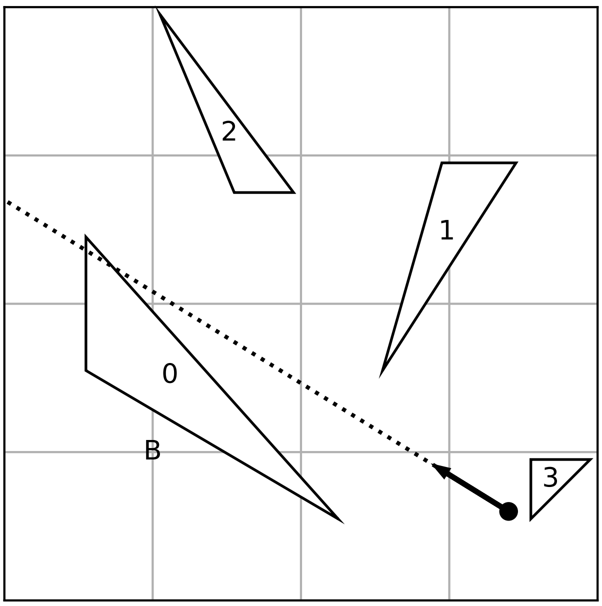
Aufgabe 4: Räumliche Datenstrukturen (18 Punkte)

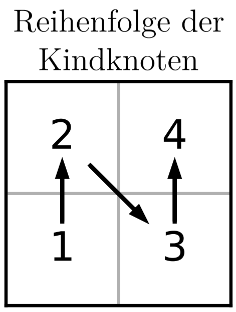
a) Wir betrachten zwei Dreiecke mit den folgenden Eckpunkten:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\4\end{pmatrix}.$$

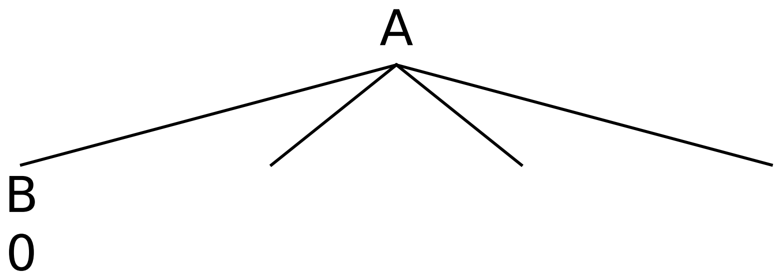
Geben Sie eine Axis-Aligned Bounding Box an, die diese beiden Dreiecke möglichst eng umschließt! **(3 Punkte)**

b) Konstruieren Sie einen Quadtree, der die unten gezeigten Dreiecke in seinen Blattknoten enthält! Der Wurzelknoten entspricht der gezeigten Box und es soll so lange unterteilt werden bis jeder Knoten höchstens ein Dreieck enthält. Kindknoten sollen stets in der unten gezeigten Reihenfolge erzeugt werden. Benennen Sie alle Knoten mit Buchstaben von A bis Z gemäß der Reihenfolge in der sie bei einer vollständigen Tiefensuche des Baums traversiert werden! Tragen Sie die Namen der Blattknoten in der Mitte der zugehörigen Flächen in die gegebene Zeichnung ein (B ist bereits eingetragen)! Vervollständigen Sie außerdem das unten gegebene Baumdiagramm mit allen Knoten, ihren Namen und den Nummern der Dreiecke bei den Blattknoten! **(8 Punkte)**





Matrikelnummer: ____________________



c) Führen Sie nun anhand des Quadtrees Raytracing in 2D aus! Genauer soll für den oben eingezeichneten Strahl der nahste Schnitt mit einem Dreieck gefunden werden. Dabei soll Mailboxing genutzt werden. Geben Sie an in welcher Reihenfolge die Knoten des Quadtree traversiert werden! Geben Sie dabei auch an wann Schnittests mit Dreiecken durchgeführt werden! Dazu sollen Sie die Folge von Buchstaben der Knoten und Nummern der Dreiecke nennen. **(5 Punkte)**

d) Ist der Quadtree für den oben betrachteten Strahlschnitttest im Vergleich zu anderen Beschleunigungsstrukturen, die Sie in der Vorlesung kennen gelernt haben, effektiv? Begründen Sie Ihre Antwort und nennen Sie ggf. eine geeignetere Beschleunigungsstruktur! **(2 Punkte)**

Aufgabe 5: Transformationen (10 Punkte)

a) Wir betrachten den Punkt $\mathbf{p} := (x, y, z, w)^T \in \mathbb{R}^4$ im 3D-Raum, der durch homogene Koordinaten gegeben ist. Beschreiben Sie die Transformation $\mathbf{Mp}$ mit der Matrix

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als eine Hintereinanderausführung einer isotropen Skalierung, einer Rotation und einer Translation, angewandt in dieser Reihenfolge! Geben Sie dazu den Skalierungsfaktor, die Rotationsachse, den Rotationswinkel und die Verschiebung entlang der Hauptachsen an! **(5 Punkte)**

b) Nun betrachten wir eine aus einer Skalierung entlang der Hauptachsen und einer Rotation zusammengesetzte Transformation:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Ebene hat den Normalenvektor $\mathbf{n} := (8, 15, 4, 0)^T$. Ermitteln Sie einen Normalenvektor $\mathbf{n}' \in \mathbb{R}^4$ der mit $\mathbf{A}$ transformierten Ebene. **(5 Punkte)**

Aufgabe 6: Texturen und Baryzentrische Koordinaten (22 Punkte)

a) Gegeben sind die Punkte

$$\mathbf{P_1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P_2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{P_3} := \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Q} := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie baryzentrische Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ des Punkts $\mathbf{Q}$ bzgl. der Punkte $\mathbf{P_1}, \mathbf{P_2}, \mathbf{P_3}$. **(4 Punkte)**

b) An den oben genannten Punkten hat eine Funktion die Werte $f_1 = 2, f_2 = 8, f_3 = 4$. Nutzen Sie lineare Interpolation um den Funktionswert bei $\mathbf{Q}$ zu bestimmen! **(2 Punkte)**

c) Wie viele Texel werden jeweils maximal bei der Filterung berücksichtigt wenn mit den folgenden Verfahren auf eine Textur zugegriffen wird? **(2 Punkte)**

Nearest Neighbor bei einer 3D Textur:

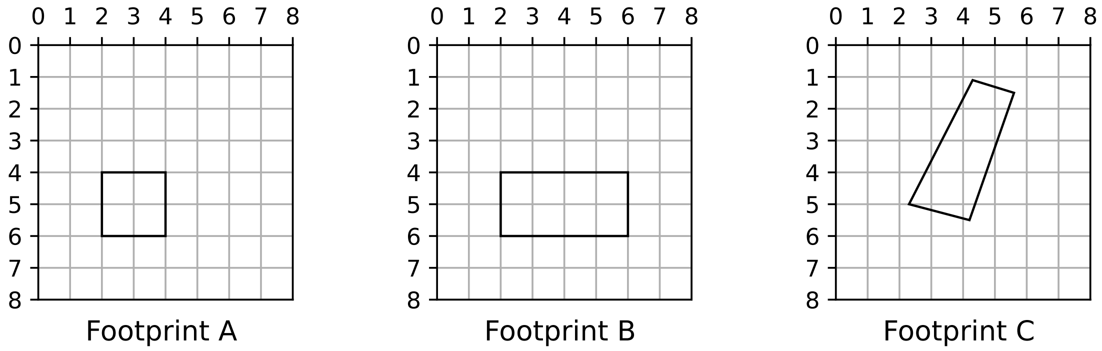
Lineare Interpolation bei einer 1D Textur:

Bilineare Interpolation bei einer 2D Textur:

Mipmapping mit trilinearer Interpolation bei einer 2D Textur:

Matrikelnummer: ______________________

d) Wir betrachten eine Textur in der wir für Pixel mit den hier gezeigten Footprints Texturzugriffe durchführen wollen. Die Einheiten an der x- und y-Achse sind jeweils Texel. Sagen Sie für jeden der Footprints und für jede der folgenden Vorfilterungsmethoden ob das Ergebnis den Footprint angemessen berücksichtigen kann! Falls nicht, erklären Sie wie sich der genutzte Footprint vom gewünschten Footprint unterscheidet! **(9 Punkte)**

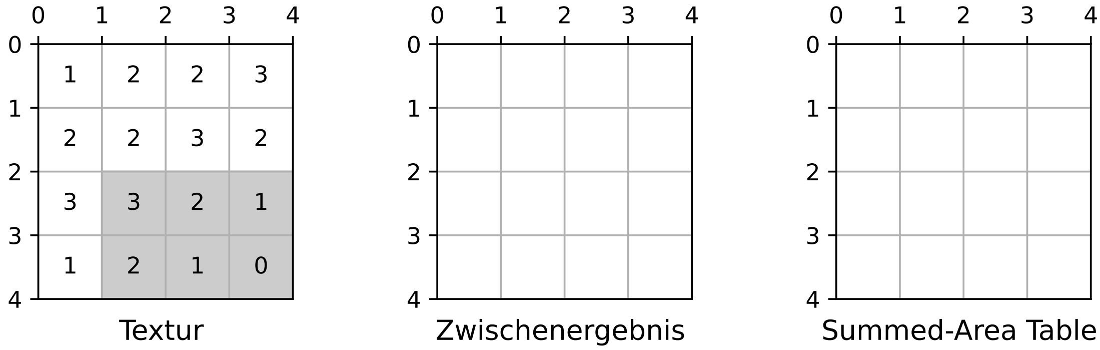


Mipmapping mit trilinearer Filterung:

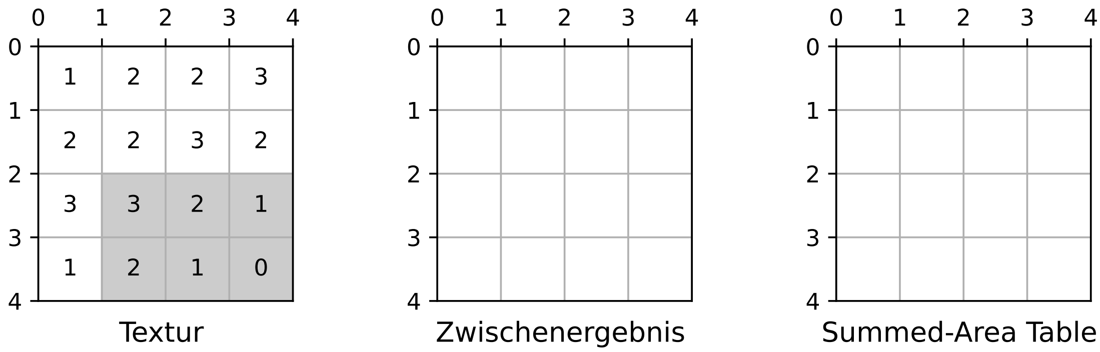
Summed-Area Table:

Anisotrope Texturfilterung durch die Grafikhardware mit 16 Abtaststellen:

e) Bauen Sie für die unten gezeigte Textur eine Summed-Area Table auf! Nutzen Sie diese anschließend um eine Filterung für den grau hinterlegten Footprint durchzuführen!
Tipp: Es kann helfen als Zwischenergebnis horizontal zu summieren. **(5 Punkte)**



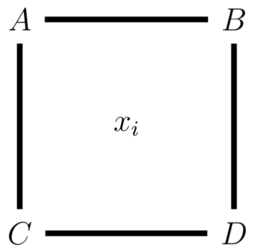
Falls Sie Fehler machen, können Sie die folgende Kopie nutzen. Markieren Sie bitte eindeutig was bewertet werden soll!



Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 7: OpenGL-Pipeline (13 Punkte)

Es sollen mit OpenGL viele Partikel visualisiert werden. Dabei ist ein Array x_i von 3D Positionen in Weltkoordinaten als Vertex Buffer gegeben, das die Mittelpunkte der Partikel enthält. Jedes Partikel soll wie in der unten stehenden Illustration als Quadrat (A, B, C, D) gezeichnet werden, das zur Kamera hin orientiert ist. Diese Quadrate sollen im Geometry Shader erzeugt werden. Zum Schluss soll das Quadrat mit einer halbtransparenten Textur gezeichnet werden. Hierbei sollen alle Quadrate im finalen Bild additiv kombiniert werden.



a) Es muss die folgende Arbeit auf der Grafikkarte getan werden:

1. Generierung der Vertices A, B, C, D pro Partikel x_i:
2. Transformation von Welt- in Kamerakoordinaten:
3. Transformation von Kamera in Clip Koordinaten:
4. Anwenden der Textur:
5. Aufsummieren der halbtransparenten Quadrate:

Geben Sie in obiger Liste für jeden Schritt an durch welche Stadien der OpenGL-Pipeline er ausgeführt wird! Welche programmierbaren Shader-Stufen werden dabei genutzt? **(8 Punkte)**

b) Welche OpenGL-Primitivtypen sind beim Vertex Shader und Geometry Shader jeweils die Ein- und Ausgabe? Wie viele solcher Primitive werden jeweils ein- und ausgegeben wenn insgesamt N Partikel gezeichnet werden? **(5 Punkte)**

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 8: Blending (12 Punkte)

a) Weshalb müssen Primitive gemäß ihrer Tiefe sortiert werden wenn man Alpha Blending nutzt? **(2 Punkte)**

b) Welche der folgenden OpenGL Aufrufe sind nötig bevor semitransparente Primitive mit Alpha Blending rasterisiert werden? **(2 Punkte)**

1	`glBlendEquation(GL_FUNC_MAX)`
2	`glBlendEquation(GL_FUNC_ADD)`
3	`glBlendEquation(GL_FUNC_SUBTRACT)`
4	`glBlendFunc(GL_ZERO, GL_ONE)`
5	`glBlendFunc(GL_ONE, GL_ONE)`
6	`glBlendFunc(GL_ONE_MINUS_SRC_ALPHA, GL_SRC_ALPHA)`
7	`glBlendFunc(GL_SRC_ALPHA,GL_ONE_MINUS_SRC_ALPHA)`

c) In welcher Reihenfolge sollten, mit Blick auf die Antwort in b), Primitive sortiert werden? **(2 Punkte)**

d) Ein Pixel im Framebuffer hat Farbe $\mathbf{c_1}$ und Alpha-Wert α_1. Nun wird dort ein Fragment mit Farbe $\mathbf{c_2}$ und Alpha-Wert α_2 gerendert. Geben Sie die Formel an nach der sich gemäß b) die neue Farbe im Framebuffer $\mathbf{c_3}$ ergibt! **(2 Punkte)**

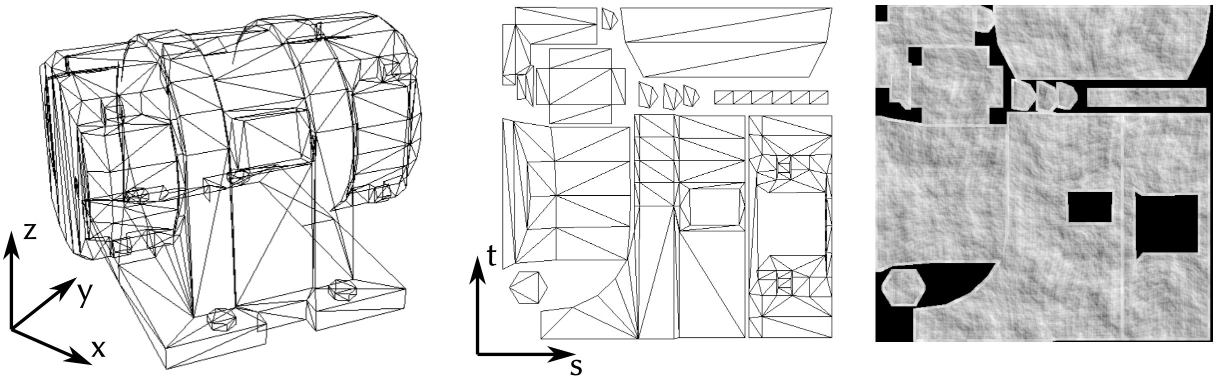
e) Welche Aspekte der in d) genannten Formel können durch die Funktionen `glBlendEquation()` und `glBlendFunc()` geändert werden? **(2 Punkte)**

f) Bei der Textur einer Pflanze enthält der Alphakanal nur die Werte 0 und 1. Entsprechend sollen diese Teile als unsichtbar oder Opak dargestellt werden. Wie kann man das erreichen ohne Primitive zu sortieren oder Probleme beim Tiefentest zu bekommen? **(2 Punkte)**

Aufgabe 9: GLSL: Prozedurales Displacement (28 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie GLSL Shader vervollständigen um Displacement Mapping auf ein Dreiecksnetz anzuwenden. Die Displacement Map ist dabei prozedural definiert. Weil die Auswertung der prozeduralen Funktion kostspielig ist, wird das Ergebnis in einer Textur zwischengespeichert. Das Verfahren arbeitet also in mehreren Schritten:

1. Erst werden die Texturkoordinaten des Dreiecksnetzes (welche in $[0,1]^2$ liegen) als Positionen verwendet um die Displacement Map in den Atlas zu rasterisieren. Die Weltkoordinaten werden dabei zur Auswertung der prozeduralen Funktion genutzt.
2. Um Artefakte durch Texturinterpolation zu vermeiden wird Dilatation auf die Displacement Map angewandt. Diesen Schritt brauchen Sie nicht zu implementieren.
3. Dann wird das Dreiecksnetz gerendert. Dafür wurden die Dreiecke bereits hinreichend fein unterteilt. Ihr Shader muss dann die folgenden Aufgaben erfüllen:
   - Zunächst muss jeder Vertex entsprechend dem Wert in der Displacement Map in Richtung der Vertexnormale verschoben werden.
   - Für die Beleuchtungsberechnung sollen die Normalenvektoren der Dreiecke nach dem Displacement Mapping genutzt werden.
   - Die Schattierungsberechnung erfolgt durch das Phong-Beleuchtungsmodell mit den fixen Parametern $k_a = 0$, $k_d = \frac{1}{2}$, $k_s = 0$ und $n = 5$.



3D Modell | Texturatlas | Displacement Map

Alle Shader haben Zugriff auf die folgenden globalen Deklarationen:

```
uniform mat4 M;    // Objekt zu Weltkoordinaten
uniform mat4 MVP;  // Objekt zu Clip Koordinaten
uniform mat4 Nrml; // M invers transponiert
uniform vec3 V;    // Betrachterposition in Weltkoordinaten
uniform vec3 L;    // Normierte Lichtrichtung in Weltkoordinaten
```

a) Vervollständigen Sie zunächst die Shader für Schritt 1. also zum Erzeugen der Displacement Map! Die Implementierung der Funktion `noise()` brauchen Sie nicht anzugeben. Falls einer der Shader nicht benötigt wird, schreiben Sie "deaktiviert" dort hin. Sie dürfen annehmen, dass `pos.w=1` gilt. **(9 Punkte)**
Vertex Shader

```
in vec4 pos;        // Position in Objektkoordinaten
in vec2 texCoord;   // Texturkoordinaten
in vec3 normal;     // Vertexnormale in Objektkoordinaten
```

```
void main() {

}
```

Geometry Shader

```
layout (triangles) in;
layout (triangle_strip, max_vertices = 3) out;
void main() {

}
```

Fragment Shader

```
out vec4 out_color;
float noise(vec3 position) {
    // ...
}
void main() {

}
```

b) Nun soll Schritt 3. implementiert werden, also das Rendering mit Displacement Mapping unter Verwendung der dilatierten Displacement Map `disp`. Vervollständigen Sie wie zuvor die entsprechenden Shader! **(19 Punkte)**

Vertex Shader

```
in vec4 pos;         // Position in Objektkoordinaten
in vec3 normal;      // Vertexnormale in Objektkoordinaten
in vec2 texCoord;    // Texturkoordinaten
uniform sampler2D disp;







void main() {








}
```

Geometry Shader

```
layout (triangles) in;
layout (triangle_strip, max_vertices = 3) out;
uniform sampler2D disp;









void main() {
```

```
}
```

Fragment Shader

```
uniform sampler2D disp;





out vec4 out_color;
void main() {





}
```

Aufgabe 10: Prozedurale Modellierung und Ray Marching (13 Punkte)

a) Die Funktion `sdfRock()` wertet eine vorzeichenbehaftete Distanzfunktion für einen einzelnen Steinbrocken aus. Vervollständigen Sie die GLSL Funktion `intersect()` um Schnittpunkte mit diesem Stein durch Sphere Tracing zu finden! **(4 Punkte)**

```
// Das t Intervall in dem Schnitte gesucht werden.
uniform float tMin, tMax;
// Punkte mit sdfRock(p) < eps gelten als Schnitt.
uniform float eps;
// Wertet die vorzeichbehaftete Distanzfunktion für einen Stein aus.
float sdfRock(vec3 p) {
    // ...
}
// Bestimmt mit Sphere Tracing ob der Strahl von o in Richtung d
// den durch sdfRock(p) gegebenen Stein schneidet. Gibt ggf. t beim
// Schnitt zurück, sonst tMax.
float intersect(vec3 o, vec3 d) {
    float t = tMin;
    while(t <= tMax) {









    }
    return tMax;
}
```

b) Nun soll zusätzlich zum ersten Stein, eine zweite Kopie dargestellt werden, die um 5 Einheiten entlang der x-Achse verschoben ist. Vervollständigen Sie die GLSL Funktion `sdfTwoRocks()` um eine entsprechende vorzeichenbehaftete Distanzfunktion auszuwerten! **(3 Punkte)**

```
float sdfRock(vec3 p) {
    // ...
}
float sdfTwoRocks(vec3 p) {






}
```

c) Die folgenden Abbildungen zeigen drei Varianten von Turbulenzfunktionen, basierend auf der gleichen Rauschfunktion $n(\mathbf{x})$ mit Werten in $[-1, 1]$. Diese wurden jeweils an Oberflächenpunkten eines Würfels $\mathbf{x} := (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ ausgewertet. Geben Sie für jede der folgenden Formeln an, welche der Abbildungen ihr entspricht! Dabei ist $f > 1$ der Skalierungsfaktor zwischen Oktaven und $a(\mathbf{x}, k)$ eine Gewichtungsfunktion, die hochfrequente Oktaven in dunklen Bereichen abschwächt. **(3 Punkte)**

- $\sum_k a(\mathbf{x}, k)|n(f^k\mathbf{x})|$:
- $\sum_k \frac{1}{f^k} n(f^k\mathbf{x})$:
- $\cos\Big(x + \sum_k \frac{1}{f^k}|n(f^k\mathbf{x})|\Big)$:

Abbildung A

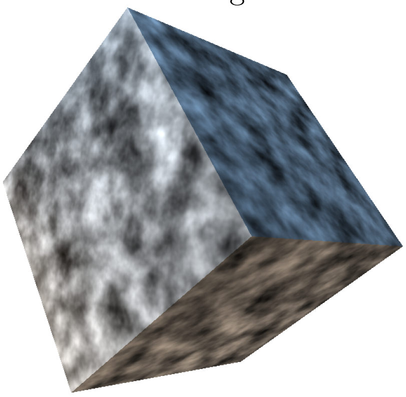


Abbildung B

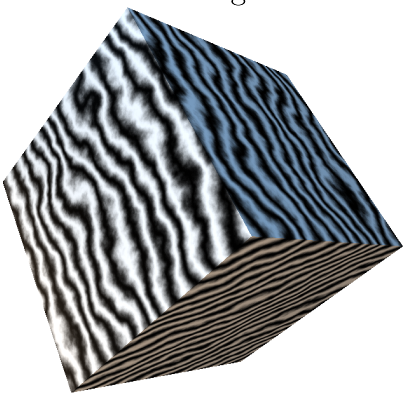
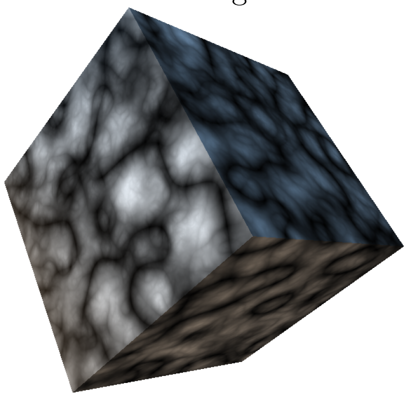


Abbildung C



d) Abbildungen D und E zeigen eine Turbulenzfunktion. Die Zufallszahlen und die Definition der Turbulenzfunktion in Abhängigkeit von der Rauschfunktion $n(\mathbf{x})$ sind in beiden Fällen gleich. Die Auswertung der Rauschfunktion ansich ist aber unterschiedlich implementiert. Geben Sie an worin dieser Unterschied besteht und begründen Sie Ihre Antwort! **(3 Punkte)**

Abbildung D

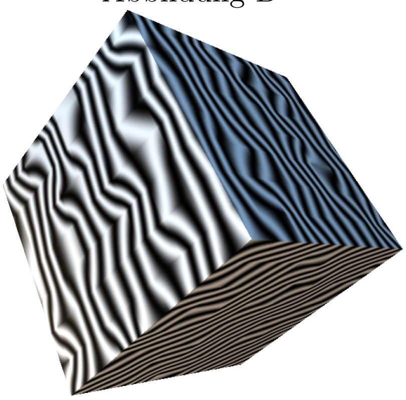
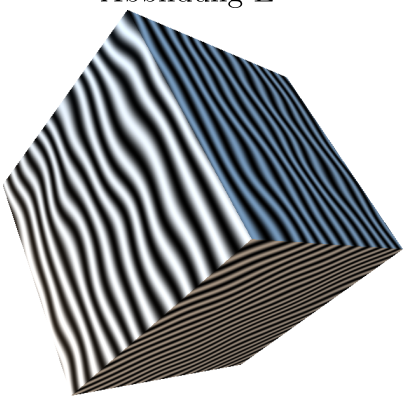


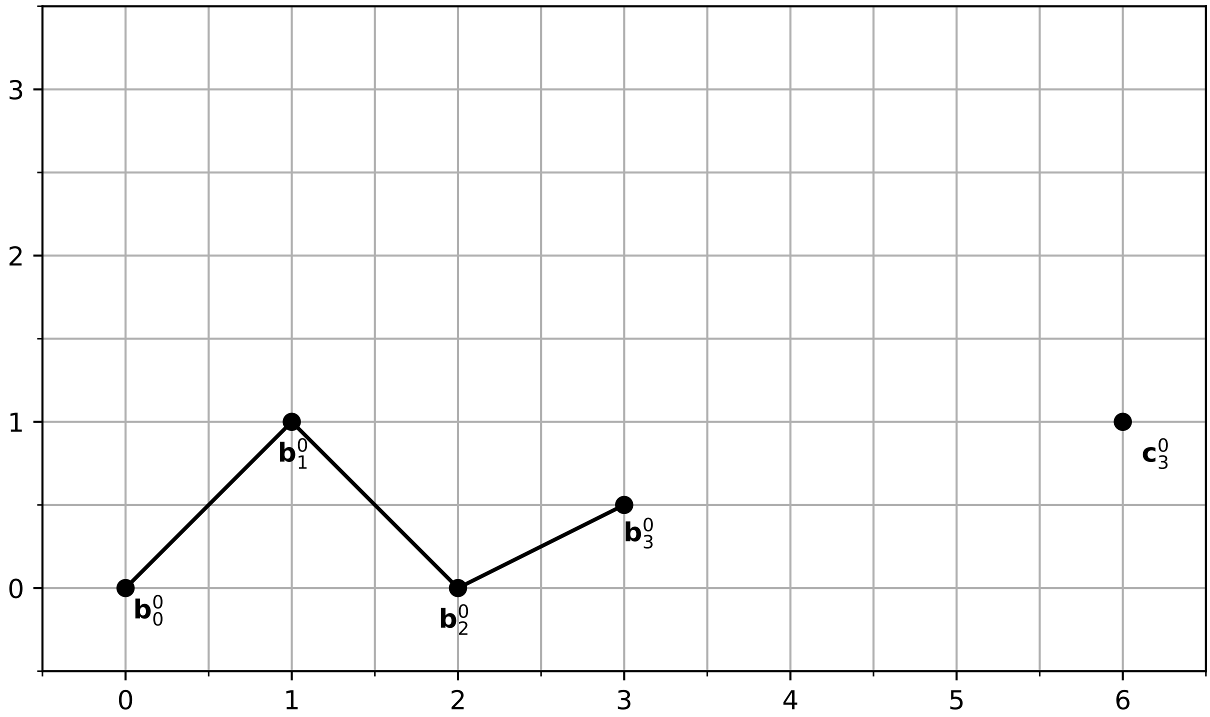
Abbildung E



Aufgabe 11: Bézier-Kurven (12 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Kontrollpunkte zweier kubischer Beziér-Kurven $F_1(u) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{b}_i B_i^3(u)$ und $F_2(u) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{c}_i B_i^3(u)$ mit $u \in [0,1]$:

$$\mathbf{b}_0 = (0,0), \qquad \mathbf{b}_1 = (1,1), \qquad \mathbf{b}_2 = (2,0), \qquad \mathbf{b}_3 = \left(3, \frac{1}{2}\right), \qquad \mathbf{c}_3 = (6,1).$$



a) Berechnen Sie $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 \in \mathbb{R}^2$ so, dass der entstehende Bézier-Spline C^2-stetig ist! **(6 Punkte)**

Matrikelnummer: ____________________

b) Skizzieren Sie die Bézier-Kurven F_1 und F_2 sowie deren Kontrollpolygone unter Zuhilfenahme einer zeichnerischen de Casteljau-Auswertung an der Stelle $u = \frac{1}{2}$! Achten Sie darauf, dass die wichtigen Eigenschaften der Bézier-Kurven und der Auswertung erkennbar sind! **(6 Punkte)**

Falls Sie beim Zeichnen Fehler machen, können Sie die folgende Kopie der Skizze nutzen. Markieren Sie bitte eindeutig welche Lösung bewertet werden soll!